Problemi di Fisica

primo principio termodinamica

PROBLEMA

Uno scaldabagno contiene 60 litri di acqua a 20 °C ed è caratterizzato da una potenza di 2,0 kW. Calcolare la temperatura dell'acqua dopo che l'apparecchio è stato acceso per 50 minuti.

SOLUZIONE

Per definizione, la potenza è data dal rapporto tra l'energia ed il tempo:

$$P = \frac{E}{t}$$

per cui:

$$E = P \cdot t = 2000 \cdot 3000 = 6 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$$

L'energia E non è altro che il calore assorbito dall'acqua, per cui dalla legge fondamentale della calorimetria siamo in grado di calcolare la temperatura raggiunta dall'acqua dopo 50 minuti di funzionamento dello scaldabagno:

$$Q = mc\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{6 \cdot 10^6}{60 \cdot 4186} = 24\,°C \qquad \text{per cui: } T_{finale} = 20 + 24 = 44\ °C$$

PROBLEMA

Un palloncino pieno d'acqua, lasciato cadere da grande altezza, subisce un urto anelastico con il suolo, cosicché il liquido contenuto al suo interno si riscalda. Nell'ipotesi che la massa dell'involucro sia trascurabile e che tutto il calore sviluppato nell'urto sia assorbito dall'acqua, calcolare l'altezza da cui deve cadere il palloncino affinché la temperatura dell'acqua possa aumentare di 2,00 °C.

SOLUZIONE

Il palloncino, una volta giunto a terra,tenendo presente che l'urto è anelastico e che tutto il calore sviluppato nell'urto sia assorbito dall'acqua, trasforma tutta la sua energia meccanica in calore, per cui, per il principio di conservazione dell'energia totale si ha la seguente uguaglianza:

$$E = Q \Rightarrow mgh \Rightarrow mc\Delta t$$

che rappresenta un'equazione nella sola incognita h:

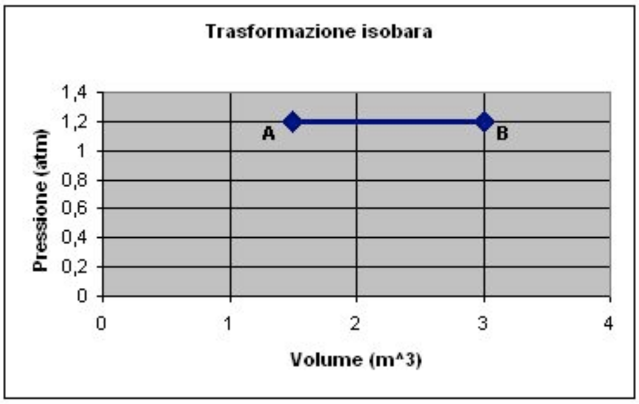
$$h = \frac{c\Delta t}{g} = \frac{4186 \cdot 2}{9{,}81} = 853\,\mathrm{m}$$

PROBLEMA

In una trasformazione isobara alla pressione di 1,2 atm il gas passa da un volume V_1 = 1,5 m^3 a un volume V_2 = 3 m^3.

1. Rappresentare la trasformazione in un grafico (p,V)
2. Il lavoro compiuto dal gas è positivo o negativo?
3. Calcolare il lavoro compiuto dal gas
4. Se il gas passa da V_1 = 3 m^3 a V_2 = 1,5 m^3, sempre a pressione costante, cosa succede al lavoro?

SOLUZIONE



1. La trasformazione isobara in un grafico (p,V) è a fianco indicata.

2. Poiché il gas compie lavoro sull'ambiente esterno ($V_2 > V_1$), tale lavoro è positivo.

3. Per una trasformazione adiabatica il lavoro è dato da:

$$L = p \cdot \Delta V = p \cdot (V_2 - V_1) = 1{,}22 \cdot 10^5 \cdot (3 - 1{,}5) = 1{,}82 \cdot 10^5 \text{J}$$

dove: 1,2 atm = $1{,}2 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa = $1{,}22 \cdot 10^5$ Pa (1 atm = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa)

4. Se il gas subisce una compressione, la trasformazione isobara sarà rappresentata allo stesso modo solo che il gas passerà dallo stato B allo stato A, per cui, essendo $V_1 > V_2$, il lavoro sarà negativo (è l'ambiente esterno a compiere lavoro sul gas). Pertanto il lavoro avrà lo stesso valore di prima ma negativo:

$$L = -1{,}82 \cdot 10^5 \text{ J}$$

PROBLEMA

Su un gas perfetto viene effettuato un lavoro di 7500 J, in modo tale che il suo volume passa da V_1 = 0,82 m^3 a V_2 = 0,52 m^3.

- Calcolare la pressione del gas

SOLUZIONE

Per una trasformazione isobara il lavoro è dato da:

$$L = p \cdot \Delta V = p \cdot (V_2 - V_1)$$

da cui possiamo ricavare la pressione:

$$p = \frac{L}{\Delta V} = \frac{-7500}{0{,}52 - 0{,}82} = 25000 \text{ Pa} = 0{,}25 \cdot 10^5 \text{Pa} = 0{,}25 \text{bar}$$

- Si noti che il lavoro L è negativo in quanto è l'ambiente esterno a compiere lavoro sul gas.
- 1 bar = 10^5 Pa

PROBLEMA

Un gas perfetto è contenuto in un cilindro con diametro di 5 cm. A pressione costante il pistone si sposta di h = 84 mm in modo tale da avere un aumento di volume. Calcolare la forza che il gas esercita sul pistone, sapendo che esso assorbe dall'esterno 320 J di calore e che la sua energia interna aumenta di 240 J.

SOLUZIONE

La forza che il gas esercita sul pistone va calcolata come formula inversa della definizione di pressione:

$$p = \frac{F}{S} \Rightarrow F = p \cdot S$$

per cui, dobbiamo calcolare la pressione p esercitata dal gas e la superficie S del cilindro.

La superficie del cilindro viene calcolata immediatamente utilizzando la formula:

$$S = \pi R^2 = 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 = 19{,}6\,cm^2$$

Poiché il gas subisce l'espansione a pressione costante (trasformazione isobara), il lavoro compiuto dal gas è dato da:

$$L = p \cdot \Delta V$$

da cui è possibile ricavare la pressione esercitata dal gas:

$$p = \frac{L}{\Delta V}$$

L'aumento di volume del gas è facilmente calcolabile utilizzando la formula del volume del cilindro:

$$\Delta V = S \cdot h = 19{,}6 \cdot 8{,}4 = 165\,cm^3$$

mentre il lavoro L viene determinato dal 1° principio della termodinamica:

$$L = Q - \Delta U = 320 - 240 = 80\,J$$

Pertanto, la pressione alla quale il gas si espande assume il seguente valore:

$$p = \frac{80}{165 \cdot 10^{-6}} = 0{,}485 \cdot 10^6\,Pa$$

In definitiva, la forza che il gas esercita sul pistone è:

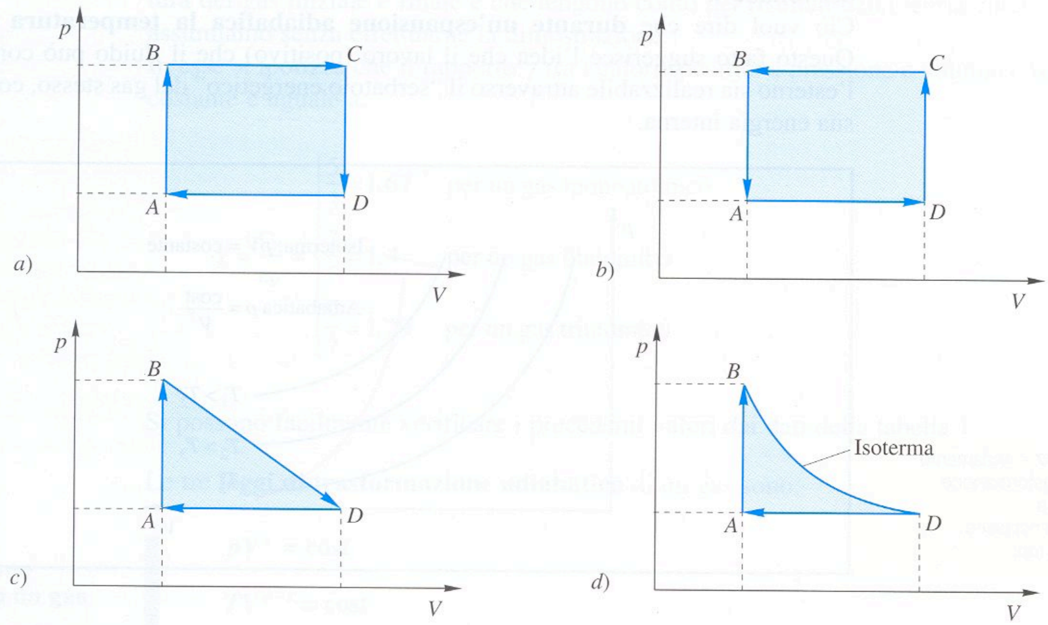
$$F = 0{,}485 \cdot 10^6 \cdot 19{,}6 \cdot 10^{-4} = 951\,N$$

PROBLEMA

Calcola il lavoro svolto nelle seguenti trasformazioni reversibili di una mole di gas monoatomico, delle quali si fornisce una rappresentazione grafica sul piano di Clapeyron, sapendo che:

$p_A = 10^5$ Pa $\qquad V_A = 1$ dm^3 $\qquad p_C = 3p_A$ $\qquad V_C = 3V_A$

Fornisci il risultato in joule e in cal.



■ **SOLUZIONE**

a) La trasformazione è costituita da due isocore AB e CD e da due isobare BC e DA. Durante le isocore il gas non produce né subisce lavoro. Per l'isobara BC il lavoro è uguale a $L_{BC} = p_C(V_C - V_B)$ e per l'isobara DA il lavoro è uguale a $L_{DA} = p_A(V_A - V_D)$. Poiché $\Delta V = V_C - V_B = V_D - V_A = -(V_A - V_D)$, allora:

$$L_{ABCDA} = L_{BC} + L_{DA} = (p_C - p_A)\cdot(V_C - V_A) = (3-1)\cdot 10^5 \text{ Pa}\cdot(3-1)\cdot 10^{-3}\text{ m}^3 = 400\text{ J} \cong 95{,}56\text{ cal}$$

dove abbiamo tenuto conto che 1 dm^3 = 10^{-3} m^3 e che $1\text{ J} = \dfrac{1}{4{,}186}$ cal.

L'espressione del lavoro L_{ABCDA} rappresenta l'area del rettangolo compreso tra le quattro trasformazioni. Tale risultato particolare si può evidentemente generalizzare a *qualsiasi trasformazione ciclica*, per quanto complessa essa possa essere.

Il lavoro in una trasformazione ciclica è sempre misurabile graficamente dall'area racchiusa dalla linea che la rappresenta nel piano di Clapeyron.

b) Notiamo che la trasformazione $ADCBA$ tocca gli stessi stati di equilibrio $ABCDA$ del caso precedente, ma in senso contrario. Il lavoro continua a essere rappresentato dall'area racchiusa fra le linee, ma con segno opposto. Quindi $L_{ADCBA} = -400$ J $\cong -95{,}56$ cal, ossia il gas ha subìto un lavoro dall'esterno.

c) È sufficiente calcolare l'area del triangolo ABD, come il semiprodotto della base per l'altezza:

$$L_{ABDA} = \frac{(2\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^5)\text{ J}}{2} = 200\text{ J} \cong 47{,}78\text{ cal}$$

Anche in questo caso notiamo che, essendo il verso della trasformazione orario, il lavoro è positivo.

d) Tenendo conto che la trasformazione BD è un'isoterma, possiamo scrivere:

$$L_{ABD} = L_{AB} + L_{BD} + L_{DA} = L_{BD} + L_{DA} = RT_B \ln\left(\frac{V_D}{V_A}\right) - 10^5\cdot 2\cdot 10^{-3}\text{ J} = p_B V_B \ln\left(\frac{V_D}{V_A}\right) - 200\text{ J} =$$

$$= (3\cdot 10^5\cdot 10^{-3}\cdot \ln(3) - 200)\text{ J} \cong 129\text{ J} \cong 31\text{ cal}$$

PROBLEMA

Un gas monoatomico che una costante k = 1,7 si trova alla pressione di 3,0 bar e occupa un volume di 0,1 m^3. Tale gas, senza scambiare calore con l'esterno, si espande fino a occupare un volume quattro volte maggiore di quello iniziale.

1. Calcolare la pressione finale
2. Rappresentare su un diagramma (p,V) la trasformazione in oggetto

SOLUZIONE

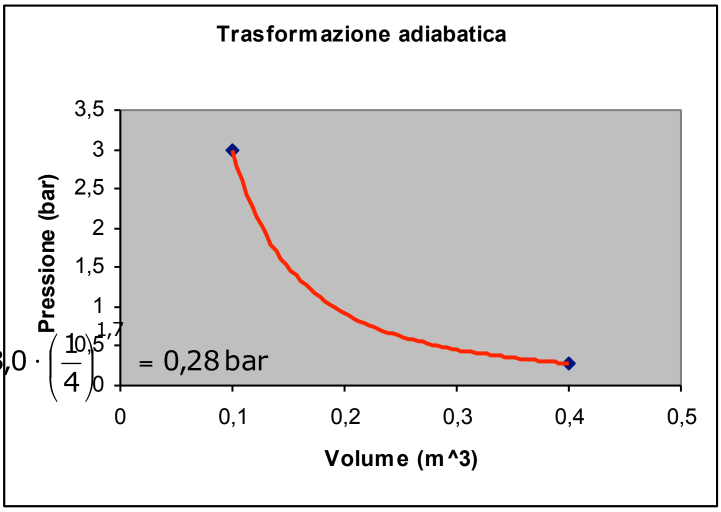
1. Si tratta di una trasformazione adiabatica, in quanto il gas non scambia calore con l'esterno durante l'espansione, descritta dalla legge:

$$(1) \quad pV^{\gamma} = \cos t \Rightarrow p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}$$

per cui, la pressione finale è:

$$p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = p_1 \cdot \left(\frac{V_1}{4V_1}\right)^{\gamma} = p_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\gamma} = 3{,}0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{1,7} = 0{,}28\,\text{bar}$$

dove $V_2 = 4V_1$, come indicato nel problema.



2. La trasformazione adiabatica su un diagramma (p,V) è rappresentata dal seguente grafico:

PROBLEMA

0,3 moli di un gas perfetto, caratterizzato da una costante k = 1,3, vengono compresse adiabaticamente dal volume iniziale $V_1 = 6\ dm^3$ fino a un volume finale $V_2 = 2\ dm^3$. Considerato che la pressione prima della compressione valeva 1,2 bar, determinare il valore finale della temperatura.

SOLUZIONE

Trattandosi di una trasformazione adiabatica, la legge è la seguente:

$$pV^{\gamma} = \cos t \Rightarrow p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}$$

per cui, la pressione finale è:

$$p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = 1{,}2 \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^{1,3} = 5\,\text{bar} = 5 \cdot 10^5\,\text{Pa}$$

Nota la pressione finale, possiamo calcolare la temperatura finale facendo ricorso all'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_2 V_2 = nRT \Rightarrow T = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{0{,}3 \cdot 8{,}31} = 401\,K = 128°\,C$$

PROBLEMA

Un gas cede 500 J di calore a una sorgente esterna e compie un lavoro pari a 1320 J.

- Calcolare la variazione della sua energia interna

SOLUZIONE

Nella risoluzione degli esercizi sui principi della termodinamica adotteremo la seguente convenzione:

- Il lavoro è positivo (L > 0) quando è compiuto dal sistema termodinamico;
- Il lavoro è negativo (L < 0) quando è compiuto sul sistema termodinamico;
- Il calore è positivo (Q > 0) quando è assorbito dal sistema termodinamico;
- Il calore è negativo (Q < 0) quando è ceduto dal sistema termodinamico.

Dall'applicazione del primo principio della termodinamica ricaviamo la variazione di energia interna:

$$Q = L + \Delta U \Rightarrow \Delta U = Q - L$$

Tenendo conto che il calore è negativo ed il lavoro positivo, si ha:

$$\Delta U = -1320 - 500 = -1820\,J$$

per cui il sistema termodinamico subisce una diminuzione di energia interna.

PROBLEMA

Un sistema termodinamico registra un aumento di energia interna pari a 1400 J. Sapendo che contemporaneamente su di esso viene compiuto un lavoro di 750 J, calcolare il calore scambiato con l'esterno.

SOLUZIONE

Tenendo presente che la variazione di energia interna è positiva ed il lavoro negativo, dall'applicazione del 1° principio della termodinamica calcoliamo il calore scambiato dal sistema con l'esterno:

$$Q = L + \Delta U = -750 + 1400 = 650\,J$$

Poiché Q è positivo, si tratta di calore assorbito dal sistema termodinamico.

PROBLEMA

In un sistema l'energia interna diminuisce di 416 J. Sapendo che ha assorbito 280 cal sotto forma di calore, determinare il lavoro fatto dal o sul sistema.

SOLUZIONE

L'energia interna è negativa, perché diminuisce, mentre il calore è positivo, perché è assorbito dal sistema, per cui dall'applicazione del 1° principio ricaviamo il lavoro

$$Q = L + \Delta U \Rightarrow L = Q - \Delta U = 1172 - (-416) = 1588\,J = 1{,}59\,kJ$$

Si tratta di lavoro fatto dal sistema in quanto il lavoro ottenuto è positivo (L > 0).

Attenzione alle unità di misura:

Q = 280 cal = 280·4,186 = 1172 J (1 cal = 4,186 J)

PROBLEMA

Calcolare la variazione di energia interna di un gas che, alla pressione costante di 1,15 bar e volume di 0,45 dm^3, viene compresso fino a dimezzare il volume iniziale, con cessione di calore all'ambiente esterno di 15 cal.

SOLUZIONE

Ricaviamo la variazione di energia interna dal 1° principio della termodinamica:

$$Q = L + \Delta U \Rightarrow \Delta U = Q - L$$

Ma il lavoro non è noto. Però sappiamo che il sistema subisce una compressione a pressione costante (trasformazione isobara), durante la quale viene compiuto il seguente lavoro:

$$L = p \cdot \Delta V = 1{,}15 \cdot 10^5 \cdot (0{,}225 - 0{,}45) \cdot 10^{-3} = -25{,}9\,J$$

che, come era lecito aspettarsi, è negativo in quanto è lavoro compiuto sul sistema.

Pertanto, la variazione di energia interna, tenendo conto che anche la Q è negativa in quanto è calore ceduto dal sistema, è:

$$\Delta U = -62{,}8 - (-25{,}9) = -36{,}9\,J$$

Essendo $\Delta U < 0$, il sistema subisce una diminuzione di energia interna, e quindi una diminuzione di temperatura.

Attenzione alle unità di misura:

- Q = -15 cal = -15·4,186 = -62,8 J (1 cal = 4,186 J)
- 1 $dm^3 = 10^{-3}\ m^3$

PROBLEMA

Una massa m di un gas perfetto subisce un processo durante il quale la sua temperatura varia da 15,0 °C a 115 °C e contemporaneamente la sua energia interna varia di $2{,}01 \cdot 10^3$ J. Sapendo che il calore specifico a volume costante è c_V = 2,40 cal/g·°C, calcolare la massa del gas.

SOLUZIONE

L'energia interna è una funzione della sola temperatura, per cui la sua variazione è data dalla relazione:

$$\Delta U = mc_V \Delta t$$

da cui è possibile ricavare la massa del gas:

$$m = \frac{\Delta U}{c_V \cdot \Delta t} = \frac{2{,}01 \cdot 10^3}{2{,}40 \cdot 4{,}186 \cdot 100} = 2{,}00\,g$$

PROBLEMA

Determinare la natura di un gas perfetto sapendo che per una variazione di temperatura pari a 100 K l'energia interna di una mole del gas (c_V = 0,746 kcal/kg·°C) varia di $1{,}25 \cdot 10^3$ J

SOLUZIONE

Dalla relazione che esprime la variazione di energia interna ricaviamo la massa del gas:

$$\Delta U = mc_V\Delta t \Rightarrow m = \frac{\Delta U}{c_V \cdot \Delta T} = \frac{1{,}25 \cdot 10^3}{0{,}746 \cdot 4{,}186 \cdot 100} = 4\,g$$

Ma la massa del gas è legata al numero di moli e alla massa molare dalla relazione:

$$m = nM \qquad \text{per cui:} \qquad M = \frac{m}{n} = \frac{4}{1} = 4\,u$$

Il gas che ha come massa molare M = 4 u è l'elio.

PROBLEMA

Un gas è contenuto in un cilindro, di raggio pari a 5,00 cm, munito di un pistone mobile che lo comprime con una forza di 78,5 N. Per l'assorbimento di una certa quantità di calore, il volume del gas aumenta di 10,0 dm^3 e la sua energia interna aumenta di 100 cal.

- Calcolare la quantità di calore assorbita.

SOLUZIONE

In seguito all'assorbimento di calore, il gas si espande e quindi compie un lavoro pari a:

$$L = p \cdot \Delta V = 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 100\,J \qquad \text{dove: } p = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi r^2} = \frac{78{,}5}{3{,}14 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2} = 10^4\ Pa$$

per cui, per il 1° principio della termodinamica, la quantità di calore assorbita è:

$$Q = L + \Delta U = 100 + 418{,}6 = 519\,J \qquad \text{dove: } 100\ cal = 100 \cdot 4{,}186 = 418{,}6\ J$$

PROBLEMA

Una massa di 6 kg di azoto (N_2) viene riscaldata innalzando la sua temperatura da 8 °C a 122 °C. Sapendo che i calori specifici a pressione e volume costante sono rispettivamente $c_p = 248$ cal/(kg · K) e $c_v = 177$ cal/(kg · K), calcola il calore Q fornito dal gas e l'aumento della sua energia interna nei casi in cui la trasformazione avvenga:
***a*) a volume costante;**
***b*) a pressione costante.**

MODELLO FISICO

Quando il gas è riscaldato a pressione costante, oltre che aumentare la propria temperatura si espande, effettuando un lavoro verso l'esterno; invece, durante il riscaldamento a volume costante il calore assorbito produce esclusivamente un aumento della temperatura del gas, ossia una variazione della sua energia interna.

Il calore specifico, che misura la quantità di calore necessaria per far aumentare di un grado un'unità di massa di gas, non è costante, ma cambia secondo il tipo di trasformazione effettuata. A volume costante perciò esso risulta minore che a pressione costante perché, nel primo caso, il calore assorbito (o ceduto) ha come *unico* risultato la variazione di temperatura del gas.

LEGGI ED EQUAZIONI

a) La quantità di calore scambiata è per definizione $Q = mc\Delta T$; nel caso di trasformazione a volume costante, essa è assorbita dal gas ed è uguale a:

$$Q_V = mc_V \Delta T$$

dove m è la massa del gas, c_V il calore specifico a volume costante e ΔT variazione di temperatura. Tutto il calore assorbito concorre ad aumentare perciò l'energia interna $Q_V = \Delta U = mc_V \Delta T$.

b) A pressione costante il calore assorbito è $Q_p = mc_p\Delta T$, mentre la variazione di energia interna continua a essere, per definizione, $\Delta U = mc_V \Delta T$.

SOLUZIONE NUMERICA

a) $Q_V = \Delta U = 6\text{ kg} \cdot 177\text{ cal/(kg} \cdot \text{K)} \cdot (122 - 8)\text{ °C} = 1{,}21 \cdot 10^5\text{ cal}$

b) $Q_p = 6\text{ kg} \cdot 248\text{ cal/(kg} \cdot \text{K)} \cdot (122 - 8)\text{ °C} = 170 \cdot 10^5\text{ cal}$ e $\Delta U = 1{,}21 \cdot 10^5\text{ cal}$

PROBLEMA

Una mole di azoto (N_2) in condizioni normali si dilata in assenza di scambi di calore con l'esterno, sino a raggiungere 1,2 volte il volume iniziale. Calcola:
***a*) la pressione finale;**
***b*) la temperatura finale;**
***c*) il lavoro necessario per effettuare la trasformazione.**

MODELLO FISICO

Nelle trasformazioni adiabatiche, non essendoci scambi di calore, il lavoro può essere prodotto solo a spese dell'energia interna. L'azoto è un gas biatomico, con calore specifico molare a volume costante pari a $c_V = 20{,}8$ J/(mol · K) e rapporto $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v} = 1{,}4$.

LEGGI ED EQUAZIONI

Le equazioni delle trasformazioni adiabatiche sono le seguenti:

$$p_A V_A^{\gamma} = p_B V_B^{\gamma} \qquad T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \qquad \text{con } V_B = 1{,}2 V_A$$

Il lavoro è uguale alla variazione dell'energia interna cambiata di segno:

$$L = -\Delta U = -nc_V\Delta T = -nc_V(T_B - T_A)$$

SOLUZIONE

Dalla prima delle precedenti relazioni ricaviamo la pressione finale p_B:

$$p_B = p_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma} = p_A\left(\frac{V_A}{1{,}2V_A}\right)^{\gamma} = 1\text{ atm} \cdot \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^{1{,}4} \cong 0{,}775\text{ atm}$$

Dalla seconda otteniamo invece la temperatura finale T_B:

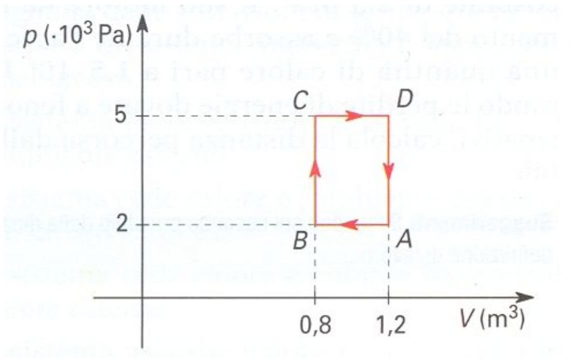
$$T_B = T_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = T_A\left(\frac{V_A}{1{,}2V_A}\right)^{\gamma-1} = 273\text{ K} \cdot \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^{1{,}4-1} \cong 253{,}8\text{ K}$$

È quindi possibile ricavare il lavoro: $L = -1 \cdot 20{,}8\text{ J/K} \cdot (253{,}8 - 273)\text{ K} \cong 399{,}4\text{ J}$

Il segno del lavoro è positivo, come ci aspettavamo dalla dilatazione del gas; la temperatura del gas è però diminuita.

PROBLEMA

La figura rappresenta il ciclo termodinamico *A-B-C-D-A* a cui è sottoposta una mole di gas perfetto.



Determina:

1. il lavoro compiuto dal gas durante il ciclo termodinamico;
2. la variazione di energia interna del gas nella trasformazione;
3. il calore assorbito o ceduto dal gas;
4. la temperatura del gas nello stato *A.*

SOLUZIONE

1. Il lavoro compiuto dal gas durante il ciclo termodinamico è pari all'area della figura ABCD; infatti, all'area sottesa dalla trasformazione isobara CD, che rappresenta un'espansione, va sottratta l'area sottesa dalla trasformazione AB, che rappresenta una compressione. Le trasformazioni isocore BC e AD non producono lavoro. Pertanto:

$$L = \text{area di ABCD} = \text{base} \cdot \text{altezza} = 0{,}4 \cdot 3 \cdot 10^3 = 1200\ \text{J}$$

2. Per una trasformazione ciclica, la variazione di energia interna è sempre nulla:

$$\Delta U_{ciclica} = 0$$

Infatti, il gas subendo il ciclo termodinamico, ritorna nello stato A, ossia alla stessa temperatura iniziale, per cui ΔU è nulla in quanto dipende unicamente dalla variazione di temperatura.

3. Essendo ΔU = 0, il 1° principio della termodinamica diventa:

$$Q = L = 1200\ \text{J}$$

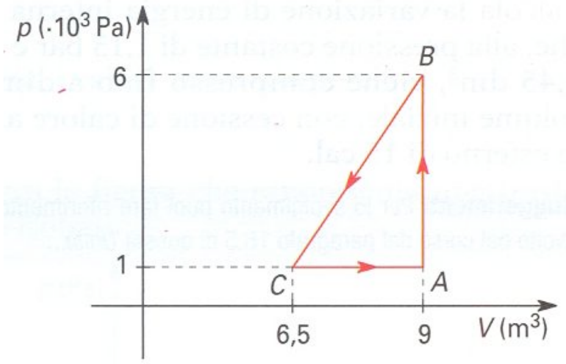
e poiché è positivo, si tratta di calore assorbito.

4. Poiché sono note le variabile termodinamiche p e V e il numero di moli del gas nello stato A, la temperatura nello stesso stato la ricaviamo dall'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_A V_A = nRT_A \Rightarrow T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}2}{1 \cdot 8{,}31} = 288\ \text{K}$$

PROBLEMA

La figura rappresenta il ciclo termodinamico *A-B-C-A* a cui sono sottoposte due moli di gas perfetto.



Determina:

1. il lavoro compiuto dal gas durante il ciclo termodinamico;
2. la variazione di energia interna del gas nella trasformazione;
3. il calore assorbito o ceduto dal gas;
4. la temperatura del gas nello stato *C*.

SOLUZIONE

1. Il lavoro compiuto dal gas durante il ciclo termodinamico è pari all'area della figura ABC, che è un triangolo rettangolo:

$$L = \frac{\text{base} \cdot \text{altezza}}{2} = \frac{2{,}5 \cdot 5 \cdot 10^3}{2} = -6250\ \text{J}$$

Notare che il lavoro è negativo in quanto la trasformazione BC, che comporta una compressione del gas ($L < 0$), sottende un'area maggiore dell'area sottesa dalla trasformazione isobara CA ($L > 0$).

2. Per una trasformazione ciclica, la variazione di energia interna è sempre nulla:

$$\Delta U_{ciclica} = 0$$

3. Essendo $\Delta U = 0$, il 1° principio della termodinamica diventa:

$$Q = L = -6250\ \text{J}$$

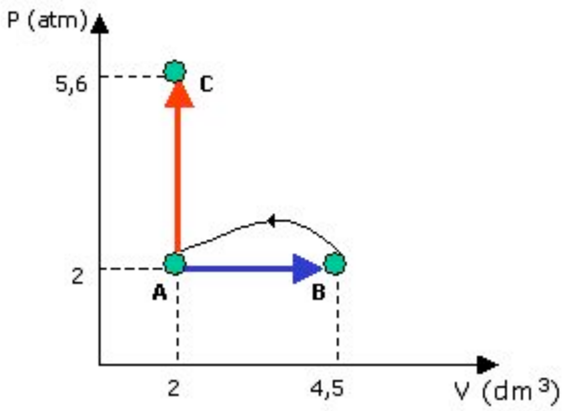
e poiché è negativo, si tratta di calore ceduto dal gas all'ambiente esterno.

4. Poiché sono note le variabile termodinamiche p e V e il numero di moli del gas nello stato C, la temperatura nello stesso stato la ricaviamo dall'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_C V_C = nRT_C \Rightarrow T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 6{,}5}{2 \cdot 8{,}31} = 391\ \text{K}$$

PROBLEMA

Un gas perfetto, contenuto in un cilindro munito di un pistone mobile, alla pressione p_A = 2,0 atm, occupa un volume V_A = 2,0 dm^3. Mantenendo costante il valore della pressione, al gas viene fornito calore finché il suo volume non assume il valore V_B = 4,5 dm^3. Dopo aver riportato il sistema nelle condizioni iniziali, il gas viene nuovamente riscaldato, utilizzando la stessa quantità di calore, mantenendo questa volta costante il volume.
Nell'ipotesi che, al termine della trasformazione isocora, la pressione assuma il valore p_C = 5,6 atm, calcolare il rapporto fra il calore specifico a pressione costante e il calore specifico a volume costante.



SOLUZIONE

Applichiamo la legge fondamentale della calorimetria sia per la trasformazione a pressione costante che a quella a volume costante:

$$Q = mc_p(T_B - T_A)$$
$$Q = mc_V(T_C - T_A)$$

Dividiamo membro a membro le due espressioni:

$$1 = \frac{c_p}{c_V} \cdot \frac{T_B - T_A}{T_C - T_A}$$

e indicando con $\gamma = c_p/c_V$, si ottiene:

$$\gamma = \frac{T_C - T_A}{T_B - T_A}$$

A questo punto, esprimiamo le temperature contenute in γ in funzione di p e V attraverso l'uso dell'equazione di stato dei gas perfetti:

$$pV = nRT \Rightarrow T = \frac{pV}{nR}$$

e si ottiene:

$$\gamma = \frac{\frac{p_C V_C}{nR} - \frac{p_A V_A}{nR}}{\frac{p_B V_B}{nR} - \frac{p_A V_A}{nR}} = \frac{\frac{1}{nR}(p_C V_C - p_A V_A)}{\frac{1}{nR}(p_B V_B - p_A V_A)} = \frac{p_C V_C - p_A V_A}{p_B V_B - p_A V_A}$$

In conclusione, introducendo i dati del problema si ha:

$$\gamma = \frac{5{,}6 \cdot 2 - 2 \cdot 2}{2 \cdot 4{,}5 - 2 \cdot 2} = 1{,}44$$

PROBLEMA

Due moli di argon, inizialmente a temperatura T_A = 27,0 °C e pressione p_A = $1,66\cdot10^4$ N/m^2, vengono riscaldate a volume costante fino a far raddoppiare la loro pressione. In seguito si espandono adiabaticamente, finché la temperatura non ritorna a 27,0 °C, e infine, mediante un processo isotermico, vengono ricondotte nello stato iniziale A.

- Calcolare per ciascuna delle tre trasformazioni la variazione di energia interna.

SOLUZIONE

Il volume del gas nello stato iniziale A si calcola mediante l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_A V_A = nRT_A \Rightarrow V_A = V_B = \frac{nRT_A}{p_A} = \frac{2\cdot 8{,}31\cdot 300}{1{,}66\cdot 10^4} = 0{,}3\,m^3$$

per cui, la temperatura dell'argon alla fine della trasformazione isocora AB (V = cost) è:

$$p_B V_B = nRT_B \Rightarrow T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{2\cdot 1{,}66\cdot 10^4\cdot 0{,}3}{2\cdot 8{,}31} = 599\,K$$

Pertanto la variazione di energia interna per la trasformazione isocora AB è:

$$\Delta U_{AB} = nC_V(T_B - T_A) = 2\cdot 2{,}98\cdot(599-300) = 1782cal$$

dove C_V = 2,98 cal/mol·K è il calore molare dell'argon.

Alla fine dell'espansione adiabatica BC, il gas ritorna alla temperatura dello stato A, ossia a 27 °C, per cui la variazione di energia interna per la trasformazione adiabatica BC è:

$$\Delta U_{BC} = nC_V(T_C - T_B) = 2\cdot 2{,}98\cdot(300-599) = -1782cal$$

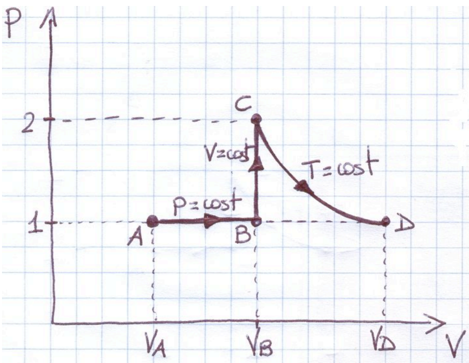
e non può che essere negativa in quanto il gas ha subito una diminuzione di temperatura nel passaggio dallo stato B allo stato C.

La variazione di energia interna per la trasformazione isoterma CA, essendo T = cost, è zero:

$$\Delta U_{CA} = 0\,cal$$

PROBLEMA

Una massa di 2,80 g di N_2 (massa atomica M = 28 u) a 27,0 °C e alla pressione di 1,00 atm viene riscaldata a pressione costante finché il suo volume non raddoppia (trasformazione AB), quindi viene riscaldata a volume costante finché non raddoppia la sua pressione (trasformazione BC) e infine, mediante un'espansione isoterma, viene ricondotta alla pressione iniziale (trasformazione CD). Sapendo che il calore molare a volume costante è C_V = 4,96 cal/ mol·°C, calcolare:



1. i valori dei parametri di stato in A, B, C, D;
2. la variazione totale di energia interna in seguito alle tre trasformazioni.

SOLUZIONE

1. I valori dei parametri di stato in A, B, C, D li calcoliamo mediante l'uso dell'equazione di stato dei gas perfetti e tenendo presente il tipo di trasformazione:

$$p_A V_A = nRT_A \Rightarrow V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}0821 \cdot 300}{1} = 2{,}46\,\text{litri}$$

dove: $n = \frac{m}{M} = \frac{2{,}80}{28} = 0{,}1\,\text{mol}$ $\quad R = 0{,}0821$ l·atm/mol·K

$V_B = 2V_A = 2 \cdot 2{,}46 = 4{,}93\,\text{litri}$ $\qquad p_B V_B = nRT_B \Rightarrow T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{1 \cdot 4.93}{0{,}1 \cdot 0{,}0821} = 600\,\text{K}$

$p_C = 2$ atm $\qquad p_C V_C = nRT_C \Rightarrow T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{2 \cdot 4.93}{0{,}1 \cdot 0{,}0821} = 1200\,\text{K}$

$$p_C V_C = p_D V_D \Rightarrow V_D = \frac{p_C}{p_D} \cdot V_C = \frac{2}{1} \cdot 4{,}93 = 9{,}85\ \text{litri}$$

2. La variazione di energia dovuta alle tre trasformazioni è data dalla somma delle variazioni di energia interna di ogni singola trasformazione:

$$\Delta U = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CD} = 149 + 298 + 0 = 447\,\text{cal}$$

dove:

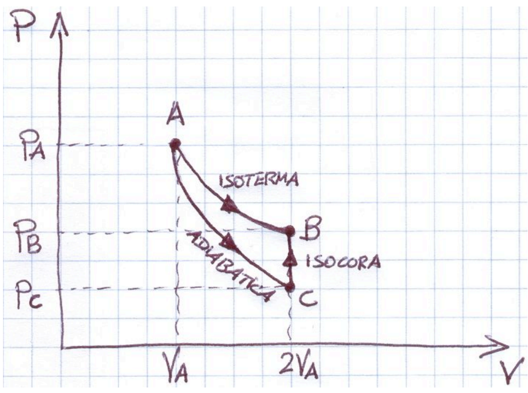
$$\Delta U_{AB} = nC_V(T_B - T_A) = 0{,}1 \cdot 4{,}96 \cdot (600 - 300) = 149\,\text{cal}$$

$$\Delta U_{BC} = nC_V(T_C - T_B) = 0{,}1 \cdot 4{,}96 \cdot (1200 - 600) = 298\,\text{cal}$$

$$\Delta U_{CD} = 0\,\text{cal} \quad \text{in quanto } T = \text{cost}$$

PROBLEMA

Per portare una mole di gas perfetto monoatomico da uno stato iniziale caratterizzato dai valori (V, T) di volume e temperatura a uno stato finale caratterizzato dai valori (2 V, T), possono essere utilizzati due diversi processi:



a) un'espansione isoterma reversibile;
b) un'espansione adiabatica reversibile dallo stato (V, T) allo stato (2V, T') seguita da una trasformazione isocora per riportare il sistema alla temperatura T.

- Calcolare il lavoro effettuato dal sistema nei due casi se T = 300 K.

SOLUZIONE

Il lavoro compiuto dal gas perfetto durante la trasformazione isoterma AB è dato da:

$$L_{AB} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = 1 \cdot 8,31 \cdot 300 \cdot \ln\frac{2V_A}{V_A} = 1 \cdot 8,31 \cdot \ln 2 = 1728\,J$$

Il lavoro compiuto dal gas perfetto durante la trasformazione adiabatica AC è dato da:

$$L_{AC} = nC_V(T_A - T_C) = 1 \cdot 2,98 \cdot (300 - 189) = 331\,cal = 331 \cdot 4,186 = 1385\,J$$

dove la temperatura T_C è stata calcolata mediante l'applicazione dell'equazione di Poisson che regola le trasformazioni adiabatiche:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Rightarrow T_C = T_A \cdot \left(\frac{V_A}{2V_A}\right)^{\gamma-1} = 300 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1,67-1} = 189\,K$$

dove γ = 1,67 per un gas monoatomico.

PROBLEMA

Una massa m = 10,0 g di acqua è contenuta in un recipiente, munito di un pistone mobile e a contatto termico con una sorgente di calore alla temperatura di 100 °C. Inizialmente l'acqua è soggetta alla pressione di 1 atm e occupa un volume *V* = 10,0 cm^3. Aumentando reversibilmente il volume del recipiente e mantenendo costante la pressione, l'acqua vaporizza completamente. Quando tutta l'acqua si è trasformata in vapore saturo, la cui densità alla pressione di 1 atm è p = 0,598 kg/m^3, calcolare:

- la variazione di energia interna del sistema.

SOLUZIONE

Per il primo principio della termodinamica la variazione di energia interna è:

$$\Delta U = Q - L$$

Ricordando che il calore di vaporizzazione dell'acqua è L_V= 2,25·10^6 J/kg, il calore assorbito durante la trasformazione è:

$$Q = mL_V = 0,0100 \cdot 2,25 \cdot 10^6 = 2,25 \cdot 10^4\,J$$

Per calcolare il lavoro eseguito dal sistema che subisce la trasformazione isobara alla pressione p = 1 atm = 1,013·10^5 Pa, è necessario conoscere il volume finale occupato dal vapore saturo:

$$V_f = \frac{m}{\rho} = \frac{0,0100}{0,598} = 1,67 \cdot 10^{-2} m^3$$

per cui:

$$L = p \cdot (V_f - V) = 1,013 \cdot 10^5 \cdot (1,67 \cdot 10^{-2} - 1,00 \cdot 10^{-5}) = 1,69 \cdot 10^3\,J$$

In conclusione, la variazione di energia interna è:

$$\Delta U = 2,25 \cdot 10^4 - 1,69 \cdot 10^3 = 2,08 \cdot 10^4\,J$$

PROBLEMA

Una certa quantità di gas perfetto biatomico. mantenuto a una pressione costante p=10,0 atm, si espande da un volume V_1= 4,00 litri a un volume V_2 = 6,00 litri.

- Calcolare la variazione di energia interna subita dal gas.

SOLUZIONE

Applicando l'equazione di stato dei gas perfetti possiamo esprimere le temperature T_1 e T_2 del gas, rispettivamente negli stati iniziale e finale, in funzione dei parametri noti e del numero *n* di moli. Troviamo:

$$T_1 = \frac{pV_1}{nR} \quad \text{e} \quad T_2 = \frac{pV_2}{nR} \qquad (1)$$

Poiché il gas è biatomico, il suo calore molare, in una trasformazione a pressione costante è C_p=7/2 R*.* Il calore assorbito dal gas, tenendo conto delle (1), è perciò:

$$Q = nC_p(T_2 - T_1) = \frac{7}{2}nR\left(\frac{pV_2}{nR} - \frac{pV_1}{nR}\right) = \frac{7}{2}p(V_2 - V_1) =$$
$$\frac{7}{2}\cdot 10 \cdot 1.013 \cdot 10^5 \cdot (6,00 \cdot 10^{-3} - 4,00 \cdot 10^{-3}) = 7,09 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Trattandosi di una trasformazione isobara, il lavoro compiuto dal sistema è:

$$L = p \cdot (V_2 - V_1) = 10 \cdot 1,013 \cdot 10^5 \cdot (6,00 \cdot 10^{-3} - 4,00 \cdot 10^{-3}) = 2,03 \cdot 10^3 \text{J}$$

Infine, per il 1° principio, la variazione di energia interna assume il seguente valore:

$$\Delta U = Q - L = 7,09 \cdot 10^3 - 2,03 \cdot 10^3 = 5,06 \cdot 10^3 \text{ J}$$

PROBLEMA

Due moli di gas perfetto biatomico sono contenute in un cilindro munito di un pistone di massa trascurabile, libero di muoversi senza attrito. Inizialmente il pistone, perfettamente isolante come il cilindro, è tenuto fermo in una posizione tale per cui la pressione del gas, mantenuto alla temperatura T_1 = 300 K, è p_1 = 4 atm. A partire da un certo istante il gas viene fatto espandere finché la sua pressione non diventa uguale alla pressione esterna p_2 = 1 atm che agisce costantemente sul pistone.

- Calcolare la temperatura del gas alla fine dell'espansione e il lavoro eseguito sull'ambiente, nei casi in cui la trasformazione sia reversibile e irreversibile.

SOLUZIONE

- Caso trasformazione reversibile

Poiché il gas è isolato termicamente, la sua trasformazione è adiabatica. Quando tale trasformazione avviene in maniera reversibile, possiamo calcolare la temperatura finale T_2 applicando la seguente equazione:

$$(1) \quad T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow T_2 = T_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 300 \cdot \left(\frac{4}{1}\right)^{-2/7} = 202\,K$$

con $\gamma = 7/5$ per un gas biatomico e quindi $\frac{1-\gamma}{\gamma} = -\frac{2}{7}$

Per un gas biatomico il calore molare a volume costante è $C_V = 5/2R$, per cui il lavoro compiuto dal gas è:

$$L = nC_V(T_1 - T_2) = 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8{,}31 \cdot (300 - 202) = 4{,}07 \cdot 10^3\,J$$

- Caso trasformazione irreversibile

Se la trasformazione è irreversibile, non possiamo applicare l'equazione (1) per ricavare la temperatura finale T_2. Utilizziamo allora il primo principio della termodinamica, che per una trasformazione adiabatica è espresso da:

$$\Delta U = -L \quad (1)$$

Poiché l'energia interna è una funzione di stato, la sua variazione ΔU dipende solo dai parametri degli stati iniziale e finale: è indifferente che la trasformazione subita dal gas sia reversibile o irreversibile. Pertanto la sua espressione è:

$$\Delta U = nC_V(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) \quad (2)$$

Durante l'espansione irreversibile, la pressione del gas non è ben definita, fatta eccezione per gli stati iniziale e finale. Tuttavia possiamo affermare che a ogni istante, per il principio di azione e reazione, la forza che il gas esercita sull'ambiente è uguale in modulo e opposta in verso alla forza che l'ambiente esercita su di esso. Pertanto il lavoro L del gas sull'ambiente è uguale e opposto al lavoro esterno L_e esercitato dall'ambiente sul gas. Poiché la pressione esterna è costantemente p_2 = 1 atm, tenendo conto che mentre il volume del gas aumenta dal valore V_1 al valore V_2 il pistone si sposta in verso opposto a quello della forza esterna, possiamo scrivere:

$$L_e = -p_2(V_2 - V_1) \quad \text{e dunque:} \quad L = -L_e = p_2(V_2 - V_1)$$

Applicando l'equazione di stato agli stati di equilibrio iniziale e finale, possiamo poi esprimere V_1 e V_2 in funzione dei parametri noti T_1, p_1 e p_2 e dell'incognita T_2:

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} \qquad V_2 = \frac{nRT_2}{p_2}$$

e quindi L diventa:

$$L = p_2\left(\frac{nRT_2}{p_2} - \frac{nRT_1}{p_1}\right) = nRp_2\left(\frac{T_2}{p_2} - \frac{T_1}{p_1}\right) \quad (3)$$

Sostituendo la (2) e la (3) nella (1) otteniamo:

$$\frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) = -nRp_2\left(\frac{T_2}{p_2} - \frac{T_1}{p_1}\right)$$

Risolvendo rispetto a T_2, dopo semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$T_2 = \frac{2}{7}T_1\left(\frac{p_2}{p_1} + \frac{5}{2}\right) = \frac{2}{7}\cdot 300\cdot\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\right) = 236\,K$$

Nota T_2 e tenendo conto della (1) e della (2) possiamo trovare il lavoro compiuto dal gas nell'espansione irreversibile:

$$L = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_2) = \frac{5}{2}\cdot 2\cdot 8{,}31\cdot(300 - 236) = 2{,}66\cdot 10^3\ J$$

Nel processo irreversibile il gas compie dunque meno lavoro che nel processo reversibile.

PROBLEMA

Un cilindro rigido posto orizzontalmente è chiuso all'estremità da un pistone che si può muovere liberamente senza attrito. Il cilindro è riempito da una mole di gas perfetto monoatomico in equilibrio con la pressione esterna di un'atmosfera ad una temperatura di 30 °C. Il pistone viene bloccato ed al gas viene fornita una quantità di calore pari a 2000 J. Tolto il blocco del pistone il gas subisce un'espansione irreversibile con perdita di calore verso l'esterno ed il sistema raggiunge un nuovo stato di equilibrio a temperatura T= 115 °C.

- Calcolare la quantità di calore scambiata nella trasformazione irreversibile.

SOLUZIONE

La quantità di calore scambiata nella trasformazione irreversibile è data dall'applicazione del 1° principio della termodinamica:

$$Q = L + \Delta U$$

Pertanto, il problema consiste nel calcolo della variazione dell'energia interna ΔU e del lavoro L.

Determiniamo la temperatura del gas raggiunta durante l'isocora:

$$Q = \Delta U = nC_V\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{Q}{nC_V} = \frac{2000}{1\cdot\frac{3}{2}\cdot 8{,}31} = 160\,K$$

dove $C_V = 3/2R$ per un gas monoatomico, quindi

Quindi la temperatura raggiunta dal gas è:

$$T = 313 + 160{,}4 = 463\,K$$

La variazione di energia interna nella trasformazione irreversibile vale:

$$\Delta U = nC_V\Delta T = 1\cdot\frac{3}{2}\cdot 8{,}31\cdot(388 - 463) = -935\,J$$

Calcoliamo ora il lavoro fatto dal gas.

$$V_{Iniziale} = \frac{nRT_i}{p_i} = \frac{1\cdot 8{,}31\cdot 303}{1{,}013\cdot 10^5} = 2486\cdot 10^{-5}\ m^3 = 25\,dm^3 = 25\,litri$$

$$V_{Finale} = \frac{nRT_f}{p_f} = \frac{1 \cdot 8{,}31 \cdot 388}{1{,}013 \cdot 10^5} = 3183 \cdot 10^{-5}\ m^3 = 31{,}8\ dm^3 = 31{,}8\ litri$$

L'espansione avviene a pressione costante, dove la pressione è quella esterna (pari ad un'atmosfera), per cui il lavoro compiuto è:

$$L = p\Delta V = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot (3183 \cdot 10^{-5} - 2486 \cdot 10^{-5}) = 706\ J$$

Ad ogni modo, qualunque sia la pressione esterna p, dall'equazione di stato si ha che:

$$p\Delta V = nR\Delta T \quad \text{per cui: } L = p\Delta V = nR\Delta T = 1 \cdot 8{,}31 \cdot (388 - 313) = 706\ J$$

Infine, la quantità di calore ceduta nella trasformazione irreversibile vale:

$$Q = L + \Delta U = 706 - 935 = -229\ J$$

Si tratta di calore ceduto in quanto $Q < 0$.

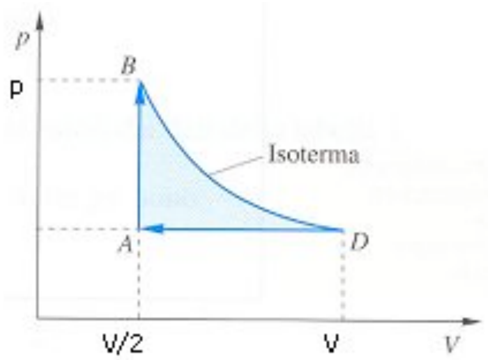
PROBLEMA

Quattro moli di gas perfetto monoatomico eseguono un ciclo, composto da un'espansione isoterma, una compressione isobara ed una trasformazione isocora. Sapendo che la temperatura dell'isoterma è 320 K e che durante l'isobara il volume dimezza, calcolare :

1. il lavoro del ciclo;
2. il calore scambiato nell'isoterma;
3. il calore scambiato nell'isobara.

SOLUZIONE

Il ciclo termodinamico è il seguente:



Indicando con p la pressione del gas nel punto B e con V il volume nel punto D, si hanno le seguenti relazioni:

$p_B = p$, $V_B = V/2$ $\quad p_D = p_x$, $V_D = V$ $\quad p_A = p_D$ $\ V_A = V/2$

Per ricavare il valore della pressione p_x nel punto D ricordiamo che i punti B e D sono connessi da un'isoterma e quindi hanno la stessa temperatura:

$$p_B V_B = p_D V_D \Rightarrow p \cdot \frac{V}{2} = p_x \cdot V \Rightarrow p_x = \frac{p}{2}$$

Ricaviamo ora la temperatura del punto A:

$$p_B V_B = nRT_B \Rightarrow p \cdot \frac{V}{2} = nRT \Rightarrow pV = 2nRT \qquad (1)$$

$$p_A V_A = nRT_A \Rightarrow \frac{p}{2} \cdot \frac{V}{2} = nRT_A \Rightarrow pV = 4nRT_A \qquad (2)$$

quindi, dal confronto della (1) e della (2), risulta:

$$2nRT = 4nRT_A \Rightarrow T_A = \frac{T}{2} = \frac{320}{2} = 160\ K$$

1. Calcoliamo il lavoro fatto durante l'isoterma:

$$L_{BD} = nRT\ln\frac{V_D}{V_B} = 4 \cdot 8{,}31 \cdot 320 \cdot \ln 2 = 7373\,J$$

Il lavoro fatto durante la compressione isobara è:

$$L_{DA} = p \cdot \Delta V = nR\Delta T = nR(T_A - T_D) = 4 \cdot 8{,}31 \cdot (160 - 320) = -5318\,J$$

Il lavoro fatto durante l'isocora è nullo:

$$L_{AB} = 0\,J$$

In definitiva, il lavoro del ciclo è:

$$L = L_{BD} + L_{DA} = 7373 - 5318 = 2055\,J$$

2. Durante la trasformazione isoterma, essendo T = cost, la variazione di energia interna è nulla $\Delta U = 0$, per cui il calore scambiato, grazie al 1° principio è:

$$Q_{BD} = L_{BD} = 7373\,J$$

3. Il calore scambiato durante l'isobara, ricordando che il gas è monoatomico $C_p = 5/2R$, grazie al 1° principio, è dato da:

$$Q_{DA} = nC_p\Delta T = 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8{,}31 \cdot (160 - 320) = -13296\,J$$